Tentamen Computerondersteund Probleemoplossen

15 april 2011, 9.00-12.00 uur.

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven waarvoor in het totaal negen punten te behalen zijn. De detailnormering staat onderaan het tentamen. Totaal: 9 +1 (gratis) = 10. Schrijf op elk in te leveren blad je naam en studentnummer, en op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Succes.

1. We beschouwen de integralen

$$I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 e^x x^n dx$$

waarbij $n = 0, 1, 2, 3, ...$
I_0 is eenvoudig te berekenen: $I_0 = 1 - e^{-1}$. Partiëel integreren levert

$$I_n = 1 - nI_{n-1}$$

We kunnen deze recurrente betrekking gebruiken om, uitgaande van I_0, I_n te berekenen voor $n = 1, 2, 3, ...$ M.b.v. Matlab (in enkelvoudige en dubbele precisie) krijgen we de volgende resultaten

n	I_n (enkele precisie)	I_n (dubble precisie)
0	6.3212055e-01	6.3212055882855767e-01
1	3.6787945e-01	3.6787944117144233e-01
2	2.6424110e-01	2.6424111765711533e-01
3	2.0727670e-01	2.0727664702865400e-01
4	1.7089319e-01	1.7089341188538398e-01
5	1.4553404e-01	1.4553294057308008e-01
6	1.2679577e-01	1.2680235656151950e-01
7	1.1242962e-01	1.1238350406936348e-01
8	1.0056305e-01	1.0093196744509214e-01
9	9.4932556e-02	9.1612292994170730e-02
10	5.0674438e-02	8.3877070058292702e-02
11	4.4258118e-01	7.7352229358780278e-02
12	-4.3109741e+00	7.1773247694636666e-02
13	5.7042664e+01	6.6947779969723342e-02
14	-7.9759729e+02	6.2731080423873209e-02
15	1.1964959e+04	5.9033793641901866e-02

(a) Wat gaat er mis bij de berekening in enkele precisie? Analyseer het probleem.

(b) Kunnen we de berekening in dubbele precisie gebruiken om I_{20} te berekenen? Motiveer!

(c) Beschrijf een manier om I_n voor $n = 1, 2, 3, ..., 15$ nauwkeurig uit te rekenen in enkele precisie.

2. We willen het nulpunt $\sqrt{3}$ van de functie $f(x) = x^2 - 3$ benaderen.

   (a) Het nulpunt ligt tussen 1 en 2. Bereken uitgaande van het interval $[1, 2]$ de eerste twee benaderingen m.b.v. de bisectie-methode.

   (b) Hoeveel bisecties van het interval $[1, 2]$ zijn er nodig om een benaderingsfout kleiner dan 10^{-4} te krijgen?

   (c) De methode van Newton leidt tot een iteratievoorschrift van de vorm $x_{k+1} = g(x_k)$. Bepaal de functie $g(x)$.

   (d) Neem $x_0 = 2$ en bereken x_3 volgens de methode van Newton.

   (e) Schat de fout in x_3 op basis van de resultaten van de methode van Newton (d.w.z. zonder gebruik te maken van een andere benadering van $\sqrt{3}$).
   Hoeveel Newton-iteraties zijn er nodig om een benaderingsfout kleiner dan 10^{-4} te krijgen?

3. Leg uit wat partiëel pivoteren is en geef een voorbeeld van een stelsel lineaire vergelijkingen dat m.b.v. van een LU-ontbinding (Gauss eliminatie) numeriek niet nauwkeurig opgelost kan worden zonder partiële pivotering. Motiveer!

4. Gegeven is de integraal

$$I = \int_0^1 e^x \, dx$$

   M.b.v. de geschakelde trapeziumregel zijn de volgende benaderingen $T(h)$ van I berekend ($h = 1/n$):

n	$T(h)$
1	1.8591409
2	1.7539311
4	1.7272219
8	1.7205186

   (a) Schets de grafiek van f voor $0 \leq x \leq 1$, en schets de benadering van I volgens de trapeziumregel bij $h = 1$.

   (b) Onderzoek de convergentie-orde van $T(h)$.

   (c) Welk van bovenstaande resultaten is het nauwkeurigst? Schat de fout in deze benadering af.

5. We beschouwen de differentiaalvergelijking $y'(t) = f(y(t), t)$ met beginvoorwaarde $y(0) = y_0$. We kunnen deze vergelijking benaderen m.b.v. het volgende θ-schema

$$y_{n+1} = y_n + h[(1-\theta)f(y_n, t_n) + \theta f(y_{n+1}, t_{n+1})]$$

waarbij de (uniforme) stapgrootte gelijk is aan $h = t_{n+1} - t_n$ en $\theta \in [0, 1]$. De keuze $\theta = 0$ leidt tot de voorwaartse Euler methode; $\theta = 1$ correspondeert met de achterwaartse Euler methode.

(a) Schrijf de bovenstaande θ-methode uit voor de testvergelijking $y' = \alpha y$, waarbij α een willekeurig complex getal is.

(b) Wanneer wordt een numerieke methode voor het oplossen van een gewone differentiaalvergelijking absoluut stabiel genoemd?

(c) Laat zien dat de achterwaartse Euler methode absoluut stabiel is.

(d) Voor welke waarden van $\theta \in [0, 1]$ is de bovenstaande θ-methode absoluut stabiel?

Detailnormering:

1a	0.6	2a	0.2	3	1.5	4a	0.3	5a	0.2
b	0.6	b	0.3			b	0.6	b	0.3
c	0.6	c	0.6			c	0.8	c	0.8
		d	0.2					d	0.8
		e	0.6						